

Manuel de Référence

Fascicule R3.08 : Éléments mécaniques à fibre moyenne

Document : R3.08.08

Élément de poutre multifibre (droite)

Résumé :

Ce document présente les éléments de poutre multifibre du *Code_Aster* basés sur une résolution d'un problème de poutre pour lequel chaque section d'une poutre est divisée en plusieurs fibres. Chaque fibre se comporte alors comme une poutre d'Euler.

Les poutres sont droites (Élément `POU_D_EM`). La section peut être de forme quelconque.

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- hypothèse d'Euler : le cisaillement transverse est négligé (cette hypothèse est vérifiée pour de forts élancements),
- les éléments de poutre introduit ici ne permettent pas de faire de calcul correct en torsion.

Table des matières

1 Introduction	4
2 Elément de théorie des poutres (rappels)	5
3 Les équations du mouvement des poutres	6
4 Elément de poutre droite multifibre.....	6
4.1 Elément poutre de référence.....	6
4.2 Détermination de la matrice de rigidité de l'élément multifibre.....	8
4.2.1 Cas général (poutre d'Euler)	8
4.2.2 Cas de la poutre multifibre	9
4.2.3 Discrétisation de la section en fibres – Calcul de K_s	12
4.2.4 Intégration dans le cas élastique linéaire (RIGI_MECA).....	12
4.2.5 Intégration dans le cas non-linéaire (RIGI_MECA_TANG)	13
4.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre.....	14
4.3.1 Détermination de M_{elem}	14
4.3.2 Discrétisation de la section en fibres - Calcul de M_s	16
4.4 Calcul des forces internes	16
4.5 Modèles de comportement non linéaires utilisables	18
5 Bibliographie	18

Notations

On donne la correspondance entre cette notation et celle de la documentation d'utilisation.

DX, DY, DZ et DRX, DRY, DRZ sont en fait les noms des degrés de liberté associés aux composantes du déplacement $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$.

E	module d'Young	E
ν	coefficient de Poisson	NU
G	module de Coulomb = $\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
I_y, I_z	moments géométriques de flexion par rapport aux axes y, z	IY, IZ
J_X	constante de torsion	JX
K	matrice de rigidité	
M	matrice de masse	
M_x, M_y, M_z	moments autour des axes x, y, z	MT, MFY, MFZ
N	effort normal à la section	N
S	aire de la section	A
u, v, w	translations sur les axes x, y, z	$DX \quad DY \quad DZ$
V_y, V_z	efforts tranchants suivant les axes y, z	VY, VZ
ρ	masse volumique	RHO
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	rotations autour des axes x, y, z	$DRX \quad DRY \quad DRZ$
q_x, q_y, q_z	Efforts linéiques extérieurs	

1 Introduction

L'analyse des structures soumises à un chargement dynamique nécessite des modèles de comportement capables de représenter les non-linéarités du matériau.

De nombreux modèles analytiques ont été proposés. Ils peuvent être classés selon deux groupes : a) des modèles détaillés fondés sur la mécanique du solide et leur description du comportement local du matériau (approche microscopique) et b) des modèles fondés sur une modélisation globale du comportement (approche macroscopique). Dans le premier type de modèles, nous pouvons trouver les modèles classiques E.F. ainsi que les modèles de type "fibre" (ayant un élément de type poutre comme support).

Tandis que les modèles "classiques" E.F. sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, ...), leur application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type poutre multifibre (voir [Figure 1-a]), possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler - Bernoulli tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé.

De plus, cette modélisation "intermédiaire" est relativement robuste et peu coûteuse en temps de calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires 1D.

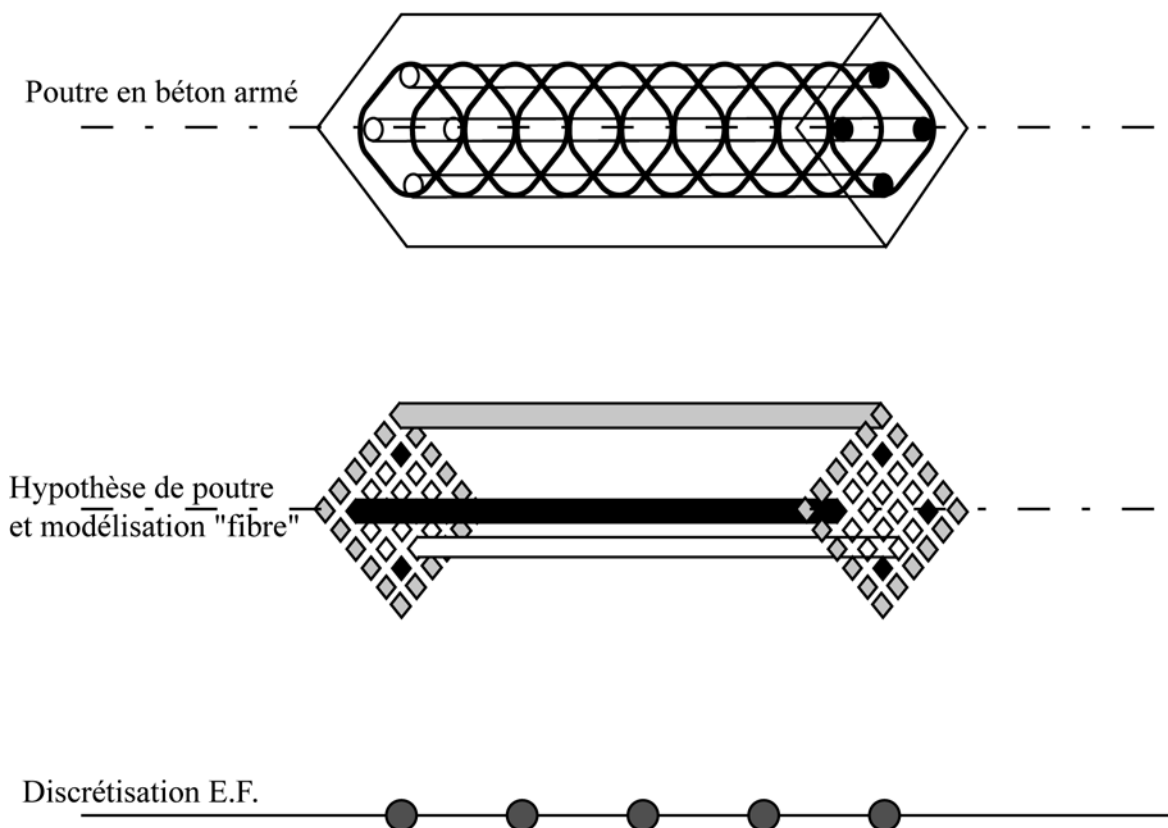


Figure 1-a : Description d'une modélisation de type poutre multifibre

2 Élément de théorie des poutres (rappels)

On reprend ici les éléments développés dans le cadre des éléments de poutre d'Euler ([bib4]).

Une poutre est un solide engendré par une surface d'aire S dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe C appelée la fibre moyenne ou fibre neutre. L'aire S est la section droite (section transversale) ou profil, et l'on suppose que si elle est évolutive, ses évolutions (taille, forme) sont continues et progressives lorsque G décrit la ligne moyenne.

Pour l'étude des poutres en général, on fait les hypothèses suivantes :

- la section droite de la poutre est indéformable,
- le déplacement transversal est uniforme sur la section droite.

Ces hypothèses permettent d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la section, en fonction des déplacements du point correspondant situé sur la ligne moyenne, et en fonction d'un accroissement de déplacement dû à la rotation de la section autour des axes transversaux.

La discrétisation en éléments "exacts" de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Ces degrés de liberté sont les trois translations u, v, w et les trois rotations $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ [Figure 2-a)].

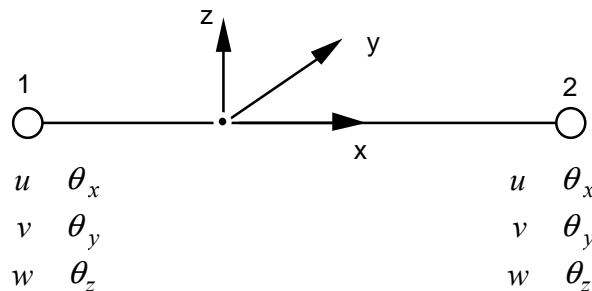


Figure 2-a : Élément poutre

Attendu que les déformations sont locales, il est construit en chaque sommet du maillage une base locale dépendant de l'élément sur lequel on travaille. La continuité des champs de déplacements est assurée par un changement de base, ramenant les données dans la base globale.

Dans le cas des poutres droites, on place traditionnellement la ligne moyenne sur l'axe x de la base locale, les déplacements transversaux s'effectuant ainsi dans le plan (y, z) .

Enfin lorsque nous rangeons des grandeurs liées aux degrés de liberté d'un élément dans un vecteur ou une matrice élémentaire (donc de dimension 12 ou 12²), on range d'abord les variables pour le sommet 1 puis celles du sommet 2. Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\underbrace{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}}_{\text{sommet 1}}, \underbrace{u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2}}_{\text{sommet 2}}$$

3 Les équations du mouvement des poutres

Nous ne reprendrons pas dans ce document toutes les équations du mouvement des poutres. Pour plus de compléments concernant cette partie on peut se référer à la documentation concernant les éléments POU_D_E et POU_D_T ([bib4]).

4 Élément de poutre droite multifibre

On décrit dans ce chapitre l'obtention des matrices élémentaires de rigidité et de masse pour l'élément de poutre droite multifibre, selon le modèle d'Euler. Les matrices de rigidité sont calculées avec les options 'RIGI_MECA' ou 'RIGI_MECA_TANG', et les matrices de masse avec l'option 'MASS_MECA' pour la matrice cohérente, et l'option 'MASS_MECA_DIAG' pour la matrice de masse diagonalisée.

Nous présentons ici une généralisation [bib3] où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique. L'élément fonctionne pour une section quelconque (hétérogène est sans symétrie) et est donc adapté à une évolution non linéaire du comportement des fibres.

On décrit également le calcul des forces nodales pour les algorithmes non linéaires : 'FORC_NODA' et 'RAPH_MECA'.

4.1 Élément poutre de référence

La [Figure 4.1-a] nous montre le changement de variable réalisé pour passer de l'élément fini réel [Figure 2-a] à l'élément fini de référence.

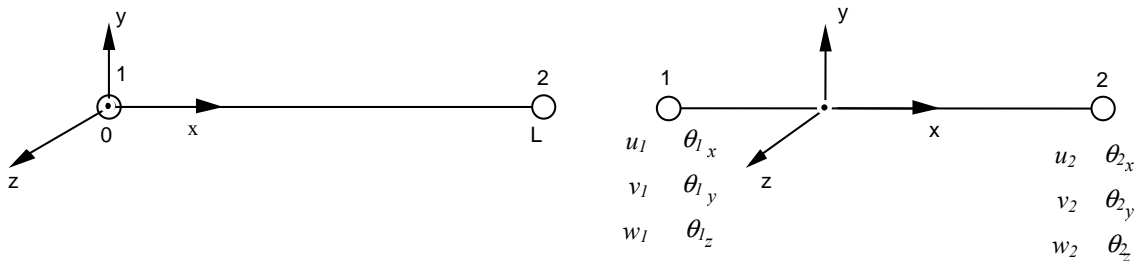


Figure 4.1-a : Élément de référence vs Élément réel

On considérera alors le champ de déplacements continu en tout point de la ligne moyenne par rapport au champ de déplacements discrétisé de la façon suivante :

$$\{U_s\} = [N]\{U\}.$$

L'indice s désigne les quantités attachées à la fibre moyenne.

En utilisant les fonctions de formes de l'élément de référence, la discrétisation des variables $u_s(x), v_s(x), w_s(x), \theta_{sx}(x), \theta_{sy}(x), \theta_{sz}(x)$ devient :

$$\begin{Bmatrix} u_s(x) \\ v_s(x) \\ w_s(x) \\ \theta_{sx} \\ \theta_{sy} \\ \theta_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & -N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 & N_{4,x} & 0 & N_{5,x} & 0 & 0 & 0 & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

éq 4.1-1

Avec les fonctions d'interpolation suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} & ; & \quad N_{1,x} = -\frac{1}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} & ; & \quad N_{2,x} = \frac{1}{L} \\ N_3 &= 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & ; & \quad N_{3,xx} = -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3} \\ N_4 &= x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & ; & \quad N_{4,xx} = -\frac{4}{L} + 6\frac{x}{L^2} \\ N_5 &= 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & ; & \quad N_{5,xx} = \frac{6}{L^2} - 12\frac{x}{L^3} \\ N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & ; & \quad N_{6,xx} = -\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2} \end{aligned}$$

éq 4.1-2

4.2 Détermination de la matrice de rigidité de l'élément multifibre

4.2.1 Cas général (poutre d'Euler)

Considérons une poutre d'Euler, droite orientée dans la direction x , soumise à des efforts distribués q_x, q_y, q_z [Figure 4.2.1-a].

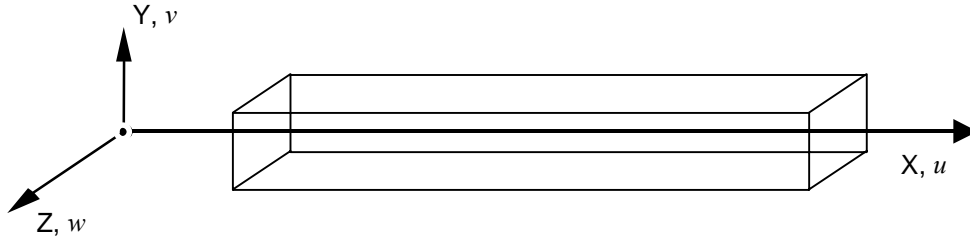


Figure 4.2.1-a : Poutre d'Euler 3D

Les champs de déplacements et de déformations prennent alors la forme suivante lorsque l'on écrit le déplacement d'un point quelconque de la section en fonction du déplacement (u_s) de la ligne de moyenne :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad \text{éq 4.2.1-1}$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) \quad \text{éq 4.2.1-2}$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) \quad \text{éq 4.2.1-3}$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad \text{éq 4.2.1-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad \text{éq 4.2.1-5}$$

Remarques :

- La torsion est traitée globalement à part, on ne calcule pas ε_{yz} ici.
- $f'(x)$ désigne la dérivée de $f(x)$ par rapport à x .

En introduisant les équations [éq 4.2.1-4] et [éq 4.2.1-5] dans le principe des travaux virtuels on obtient :

$$\int_{V_0} \delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dV_0 = \int_0^L (\delta u_s(x) q_x + \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \quad \text{éq 4.2.1-6}$$

q_x, q_y, q_z désignant les efforts linéiques appliqués.

Ce qui donne en utilisant l'équation [éq 4.2.1-1] :

$$\int_0^L (N \delta u'_s(x) + M_x \delta \theta'_{sx}(x) + M_y \delta \theta'_{sy}(x) + M_z \delta \theta'_{sz}(x)) dx = \int_0^L (\delta u_s(x) q_x + \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx$$

éq 4.2.1-7

Avec :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS \quad ; \quad M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS \quad ; \quad M_z = \int_S -y \sigma_{xx} dS$$

éq 4.2.1-8

Remarques :

- Le moment de torsion M_x n'est pas calculé par intégration mais calculé directement à partir de la raideur en torsion (voir [éq 4.2.2-4]).
- La théorie des poutre associée à un matériau élastique donne : $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$

4.2.2 Cas de la poutre multifibre

Nous supposons maintenant que la section S n'est pas homogène [Figure 4.2.2-a].

Sans adopter d'hypothèse particulière sur l'intersection de l'axe X avec la section S ou sur l'orientation des axes Y, Z , la relation entre les contraintes "généralisées" et les déformation "généralisées" D_s devient **[bib2]** :

$$F_s = K_s D_s$$

éq 4.2.2-1

avec :

$$F_s = (N, M_y, M_z, M_x)^T$$

$$D_s = (u'_s(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x), \theta'_{sx}(x))^T$$

éq 4.2.2-2

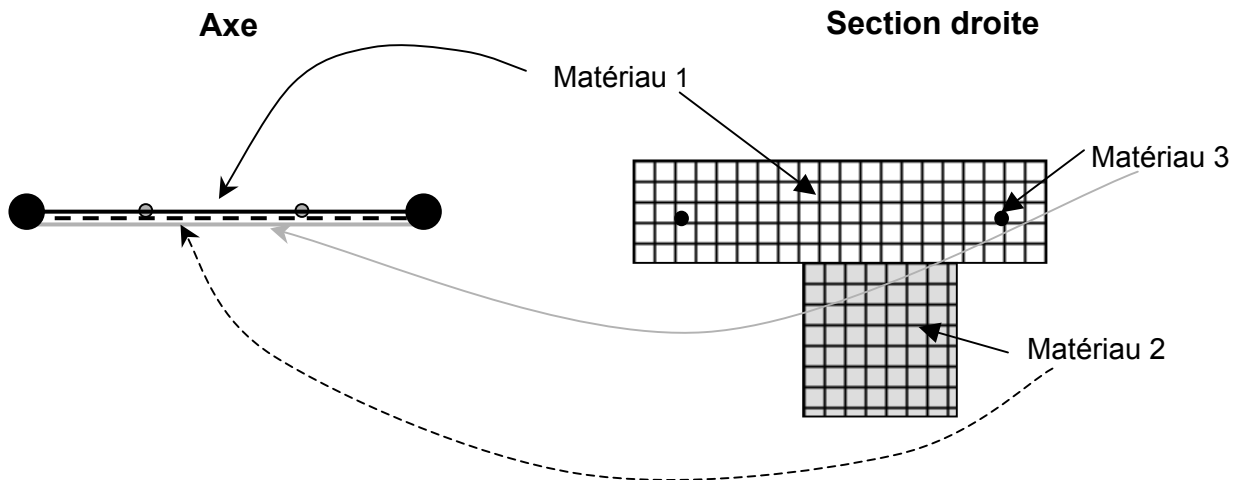


Figure 4.2.2-a : Section S quelconque - poutre multifibre

La matrice K_s peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$K_s \begin{bmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ & & K_{s33} & 0 \\ sym & & & K_{s44} \end{bmatrix} \quad \text{éq 4.2.2-3}$$

avec :

$$\begin{aligned} K_{s11} &= \int_S E dS \quad ; \quad K_{s12} = \int_S E z ds \quad ; \quad K_{s13} = - \int_S E y ds \\ K_{s22} &= \int_S E z^2 dS \quad ; \quad K_{s23} = - \int_S E y z ds \quad ; \quad K_{s33} = \int_S E y^2 ds \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.2-4}$$

où E peut varier en fonction de y et z . En effet, il se peut que dans la modélisation plane de la section [Figure 4.2.2-a)], plusieurs matériaux cohabitent. Par exemple, dans une section béton armée, il y a à la fois du béton et des armatures.

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les intégrales des équations [éq 4.2.2-4].

Le calcul des coefficients de la matrice K_s est détaillé dans le paragraphe [§4.2.3] suivant.

Remarque :

Le terme de torsion $K_{s44} = GJ_x$ est donné par l'utilisateur à l'aide de la donnée de J_x .

L'introduction des équations [éq 4.2.2-1] à [éq 4.2.2-4] dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta D_s^T K_s D_s dx - \int_0^L (\delta u_s(x) q_x + \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx = 0 \quad \text{éq 4.2.2-5}$$

Les déformations généralisées sont calculée par (D_s est donnée à l'équation [éq 4.2.2-2]) :

$$D_s = B\{U\} \quad \text{éq 4.2.2-6}$$

Avec la matrice B suivante :

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{3,xx} & 0 & N_{4,xx} & 0 & 0 & 0 & -N_{5,xx} & 0 & N_{6,xx} & 0 \\ 0 & N_{3,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{4,xx} & 0 & N_{5,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{6,xx} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{éq 4.2.2-7}$$

La discrétisation de l'espace $[0, L]$ avec des éléments et l'utilisation des équations [éq 4.2.2-5] rend l'équation [éq 4.2.1-6] équivalente à la résolution d'un système linéaire classique :

$$KU = F \quad \text{éq 4.2.2-8}$$

La matrice de rigidité de l'élément [Figure 4.2.2-b] et le vecteur des efforts résultats sont finalement donnés par :

$$K_{elem} = \int_0^L B^T K_s B \, dx$$

$$F = \int_0^L N^T Q \, dx$$

éq 4.2.2-9

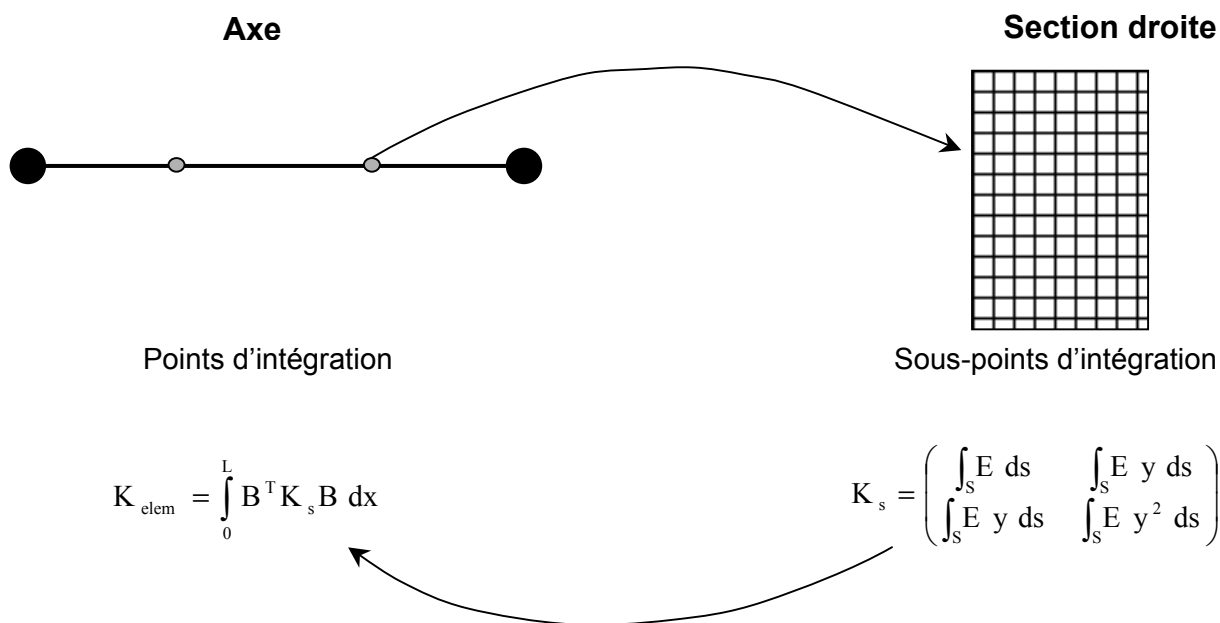


Figure 4.2.2-b : Poutre multifibre – Calcul de K_{elem}

Avec le vecteur Q qui dépend du chargement extérieur : $Q = (q_x \ q_y \ q_z \ 0 \ 0 \ 0)^T$

Si nous considérons que les efforts distribués q_x, q_y, q_z sont constants, nous obtenons le vecteur forces nodales suivant :

$$F = \left(\frac{Lq_x}{2} \ \frac{Lq_y}{2} \ \frac{Lq_z}{2} \ 0 \ -\frac{L^2q_z}{12} \ \frac{L^2q_y}{12} \ \frac{Lq_x}{2} \ \frac{Lq_y}{2} \ \frac{Lq_z}{2} \ 0 \ \frac{L^2q_z}{12} \ \frac{L^2q_y}{12} \right)^T$$

éq 4.2.2-10

4.2.3 Discrétisation de la section en fibres – Calcul de K_s

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de rigidité. Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$\begin{aligned} K_{s11} &= \sum_{i=1}^n E_i S_i \quad ; \quad K_{s12} = \sum_{i=1}^n E_i z_i S_i \quad ; \quad K_{s13} = \sum_{i=1}^n E_i y_i S_i \\ K_{s22} &= \sum_{i=1}^n E_i z_i^2 S_i \quad ; \quad K_{s23} = -\sum_{i=1}^n E_i y_i z_i S_i \quad ; \quad K_{s33} = \sum_{i=1}^n E_i y_i^2 S_i \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.3-1}$$

avec E_i et S_i le module initial ou tangent et la section de chaque fibre. L'état de contrainte est constant par fibre.

Chaque fibre est également repérée à l'aide de y_i et z_i les coordonnées du centre de gravité de la fibre par rapport à l'axe de la section défini par la commande 'COO_AXE_POUTRE' (document 'AFFE_SECT_MULTI').

4.2.4 Intégration dans le cas élastique linéaire (RIGI_MECA)

Lorsque le comportement du matériau est linéaire, l'élément poutre est homogène dans sa longueur, l'intégration de l'équation [éq 4.2.2-9] peut être faite analytiquement.

On obtient alors la matrice de rigidité suivante :

$$K_{elem} = \begin{bmatrix} \frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{s12}}{L} & \frac{K_{s13}}{L} & -\frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{s12}}{L} & -\frac{K_{s13}}{L} \\ & \frac{12K_{s33}}{L^3} & \frac{-12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s33}}{L^2} & 0 & \frac{-12K_{s33}}{L^3} & \frac{12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s33}}{L^2} \\ & & \frac{12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s22}}{L^2} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & 0 & \frac{12K_{s23}}{L^3} & \frac{-12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s22}}{L^2} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} \\ & & & \frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4K_{s22}}{L} & \frac{4K_{s23}}{L} & -\frac{K_{s12}}{L} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s22}}{L^2} & 0 & \frac{2K_{s22}}{L} & \frac{2K_{s23}}{L} \\ & & & & & \frac{4K_{s33}}{L} & -\frac{K_{s13}}{L} & \frac{-6K_{s33}}{L^2} & \frac{6K_{s23}}{L^2} & 0 & \frac{2K_{s23}}{L} & \frac{2K_{s33}}{L} \\ & & & & & & \frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{s12}}{L} & \frac{K_{s13}}{L} \\ & & & & & & & \frac{12K_{s33}}{L^3} & \frac{-12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & \frac{-6K_{s33}}{L^2} \\ & & & & & & & & \frac{12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s22}}{L^2} & \frac{6K_{s23}}{L^2} \\ & & & & & & & & & \frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4K_{s22}}{L} & \frac{4K_{s23}}{L} \\ & & & & & & & & & & & \frac{4K_{s33}}{L} \\ & & & & & & & & & & & \frac{4K_{s33}}{L} \end{bmatrix} \quad \text{SYM}$$

éq 4.2.4-1

avec les termes suivants : $K_{s11}, K_{s12}, K_{s13}, K_{s22}, K_{s33}, K_{s23}, K_{s44}$ sont donnés à l'équation [éq 4.2.2-4].

4.2.5 Intégration dans le cas non-linéaire (RIGI_MECA_TANG)

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, pour permettre une intégration correcte des efforts internes (voir paragraphe [§4.4]), il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration le long de la poutre. Nous avons choisi d'utiliser deux points de Gauss.

L'intégrale de K_{elem} [éq 4.2.2-9] se calcule sous forme numérique :

$$K_{elem} = \int_0^L B^T K_s B dx = j \sum_{i=1}^2 w_i B(x_i)^T K_s(x_i) B(x_i) \quad \text{éq 4.2.5-1}$$

où x_i est la position du point de Gauss i dans un élément de référence de longueur 1, $1 \pm 0,57735026918963/2$

w_i est le poids du point de Gauss i . On prend ici $w_i = 0,5$ pour chacun des 2 points

j est le Jacobien On prend ici $j = L$, l'élément réel ayant une longueur L et la fonction de forme

pour passer à l'élément de référence étant $\frac{x}{L}$.

$K_s(x_i)$ est calculé à l'aide des équations [éq 4.2.2-3], [éq 4.2.2-4] (voir paragraphe [§4.2.3] pour l'intégration numérique de ces équations)

Le calcul analytique de $B(x_i)^T K_s(x_i) B(x_i)$ donne :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} B_1^2 K_{s11} & -B_1 B_2 K_{s13} & B_1 B_2 K_{s12} & 0 & -B_1 B_3 K_{s12} & -B_1 B_3 K_{s13} & -B_1^2 K_{s11} & B_1 B_2 K_{s13} & -B_1 B_2 K_{s12} & 0 & -B_1 B_4 K_{s12} & -B_1 B_4 K_{s13} \\ B_2^2 K_{s33} & B_2^2 K_{s23} & B_2^2 K_{s22} & 0 & B_2 B_3 K_{s23} & B_2 B_3 K_{s33} & B_1 B_2 K_{s13} & -B_2^2 K_{s33} & B_2^2 K_{s23} & 0 & B_2 B_4 K_{s23} & B_2 B_4 K_{s33} \\ & B_2^2 K_{s22} & 0 & -B_2 B_3 K_{s22} & -B_2 B_3 K_{s23} & -B_1 B_2 K_{s12} & B_2^2 K_{s23} & -B_2^2 K_{s22} & 0 & -B_2 B_4 K_{s22} & -B_2 B_4 K_{s23} \\ & & B_1^2 K_{s44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_1^2 K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & B_3^2 K_{s22} & B_3^2 K_{s23} & B_1 B_3 K_{s12} & -B_2 B_3 K_{s23} & B_2 B_3 K_{s22} & 0 & B_3 B_4 K_{s22} & B_3 B_4 K_{s23} \\ & & & & B_3^2 K_{s33} & B_1 B_3 K_{s13} & -B_2 B_3 K_{s33} & B_2 B_3 K_{s23} & 0 & B_3 B_4 K_{s23} & B_3 B_4 K_{s33} \\ & & & & & B_1^2 K_{s11} & -B_1 B_2 K_{s13} & B_1 B_2 K_{s12} & 0 & B_1 B_4 K_{s12} & B_1 B_4 K_{s13} \\ & & & & & & B_2^2 K_{s33} & -B_2^2 K_{s23} & 0 & -B_2 B_4 K_{s23} & -B_2 B_4 K_{s33} \\ & & & & & & & B_2^2 K_{s22} & 0 & B_2 B_4 K_{s22} & B_2 B_4 K_{s23} \\ & & & & & & & & B_1^2 K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & B_4^2 K_{s22} & B_4^2 K_{s23} \\ & & & & & & & & & & B_4^2 K_{s33} \end{array}$$

éq 4.2.5-2

où les B_i sont calculés à l'abscisse x_i de l'élément de référence avec :

$$\begin{aligned} B_1 &= -N_{1,x} = N_{2,x} = \frac{1}{L} \\ B_2 &= N_{3,xx} = -N_{5,xx} = -\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x_i}{L^2} \\ B_3 &= N_{4,xx} = -\frac{4}{L} + 6 \frac{x_i}{L} \\ B_4 &= N_{6,xx} = -\frac{2}{L} + 6 \frac{x_i}{L} \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.5-3}$$

4.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre

4.3.1 Détermination de M_{elem}

De même, le travail virtuel des efforts d'inertie devient **[bib2]**:

$$W_{inert} = \int_0^L \int_S \rho \left(\delta u(x, y) \frac{d^2 u(x, y)}{dt^2} + \delta v(x, y) \frac{d^2 v(x, y)}{dt^2} + \delta w(x, y) \frac{d^2 w(x, y)}{dt^2} \right) dS dx$$

$$= \int_0^L \delta U_s M_s \frac{d^2 U_s}{dt^2} dx$$

éq 4.3.1-1

avec U_s le vecteur des déplacements "généralisés".

Ce qui donne pour la matrice de masse :

$$M_s = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & M_{s23} & 0 \\ & & & & M_{s33} & 0 \\ sym & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{bmatrix}$$

éq 4.3.1-2

avec :

$$M_{s11} = \int_S \rho ds \quad ; \quad M_{s12} = \int_S \rho z ds \quad ; \quad M_{s13} = -\int_S \rho y ds$$

$$M_{s22} = \int_S \rho z^2 ds \quad ; \quad M_{s23} = -\int_S \rho y z ds \quad ; \quad M_{s33} = \int_S \rho y^2 ds$$

éq 4.3.1-3

avec ρ qui peut varier en fonction de y et z .

Comme pour la matrice de rigidité, nous prenons en compte les déformations généralisées et la discrétisation de l'espace $[0, L]$. Ce qui donne finalement pour la matrice de masse élémentaire :

$$M_{elem} = \begin{bmatrix} M_{elem}^1 \\ M_{elem}^2 \\ M_{elem}^3 \\ M_{elem}^4 \\ M_{elem}^5 \\ M_{elem}^6 \\ M_{elem}^7 \\ M_{elem}^8 \\ M_{elem}^9 \\ M_{elem}^{10} \\ M_{elem}^{11} \\ M_{elem}^{12} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{elem}^1 &= \begin{bmatrix} LM_{s11} & -M_{s13} & M_{s12} & 0 & LM_{s12} & LM_{s13} & LM_{s11} & M_{s13} & -M_{s12} & 0 & -LM_{s12} & -LM_{s13} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^2 &= \begin{bmatrix} sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s33}}{5L} - \frac{6M_{s23}}{5L} - \frac{7LM_{s12}}{20} & \frac{M_{s23}}{10} & \frac{11L^2M_{s11}}{210} + \frac{M_{s33}}{10} - \frac{M_{s13}}{2} & \frac{9LM_{s11}}{70} - \frac{6M_{s33}}{5L} & \frac{6M_{s23}}{5L} - \frac{3LM_{s12}}{20} & \frac{M_{s23}}{10} - \frac{13L^2M_{s11}}{420} + \frac{M_{s33}}{10} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^3 &= \begin{bmatrix} sym & sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s22}}{5L} - \frac{7LM_{s13}}{20} - \frac{11L^2M_{s11}}{210} - \frac{M_{s22}}{10} - \frac{M_{s23}}{10} & \frac{M_{s12}}{2} & \frac{6M_{s23}}{5L} & \frac{9LM_{s11}}{70} - \frac{6M_{s22}}{5L} - \frac{3LM_{s13}}{20} & \frac{13L^2M_{s11}}{420} - \frac{M_{s22}}{10} - \frac{M_{s23}}{10} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^4 &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & \frac{LM_{s22} + LM_{s33}}{3} & \frac{L^2M_{s13}}{20} - \frac{L^2M_{s12}}{20} & 0 & -\frac{3LM_{s12}}{20} - \frac{3LM_{s13}}{20} & \frac{LM_{s22} + LM_{s33}}{6} - \frac{L^2M_{s13}}{30} & \frac{L^2M_{s12}}{30} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^5 &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s22}}{15} - \frac{2LM_{s23}}{15} - \frac{LM_{s12}}{12} - \frac{M_{s23}}{10} - \frac{13L^2M_{s11}}{420} + \frac{M_{s22}}{10} & \frac{L^2M_{s13}}{30} - \frac{L^3M_{s11}}{140} - \frac{LM_{s22}}{30} - \frac{LM_{s23}}{30} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^6 &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s33}}{15} - \frac{LM_{s13}}{12} & \frac{13L^2M_{s11}}{420} - \frac{M_{s33}}{10} & \frac{M_{s23}}{10} - \frac{L^2M_{s12}}{30} - \frac{LM_{s23}}{30} - \frac{L^3M_{s11}}{140} - \frac{LM_{s33}}{30} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^7 &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{LM_{s11}}{3} & \frac{M_{s13}}{2} - \frac{M_{s12}}{2} & 0 & \frac{LM_{s12}}{12} & \frac{LM_{s13}}{12} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^8 &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s33}}{5L} - \frac{6M_{s23}}{5L} - \frac{7LM_{s12}}{20} - \frac{M_{s23}}{10} - \frac{11L^2M_{s11}}{210} - \frac{M_{s33}}{10} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^9 &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s22}}{5L} - \frac{7LM_{s13}}{20} - \frac{11L^2M_{s11}}{210} + \frac{M_{s22}}{10} & \frac{M_{s23}}{10} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^{10} &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{LM_{s22} + LM_{s33}}{3} - \frac{L^2M_{s13}}{20} & \frac{L^2M_{s12}}{20} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^{11} &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s22}}{15} - \frac{2LM_{s23}}{15} \end{bmatrix} \\ M_{elem}^{12} &= \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s33}}{15} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

éq 4.3.1-4

avec les termes suivants : $M_{s11}, M_{s12}, M_{s13}, M_{s22}, M_{s33}, M_{s23}$ qui sont donnés à l'équation [éq 4.3.1-3].

Remarque :

*La matrice de masse est réduite par la technique des masses concentrées ([bib4]). Cette matrice de masse diagonale s'obtient par l'option '**MASS_MECA_DIAG**' de l'opérateur **CALC_MATR_ELEM**.*

4.3.2 Discrétisation de la section en fibres - Calcul de M_s

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de masse. Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$\begin{aligned} M_{s11} &= \sum_{i=1}^n \rho_i S_i & ; & & M_{s12} &= \sum_{i=1}^n \rho_i z_i S_i & ; & & M_{s13} &= -\sum_{i=1}^n \rho_i y_i S_i \\ M_{s22} &= \sum_{i=1}^n \rho_i z_i^2 S_i & ; & & M_{s23} &= -\sum_{i=1}^n \rho_i y_i z_i S_i & ; & & M_{s33} &= \sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2 S_i \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-1}$$

avec ρ_i et S_i la masse volumique et la section de chaque fibre. y_i et z_i sont les coordonnées du centre de gravité de la fibre définis comme précédemment.

4.4 Calcul des forces internes

Le calcul des forces nodales F_{int} dues à un état de contraintes internes données se fait par l'intégrale :

$$F_{\text{int}} = \int_0^L B^T F_s dx \quad \text{éq 4.4-1}$$

où B est la matrice donnant les déformations généralisées en fonction des déplacements nodaux [éq 4.2.2-6] et où F_s est le vecteur des contraintes généralisées donné à l'équation [éq 4.2.2-2],

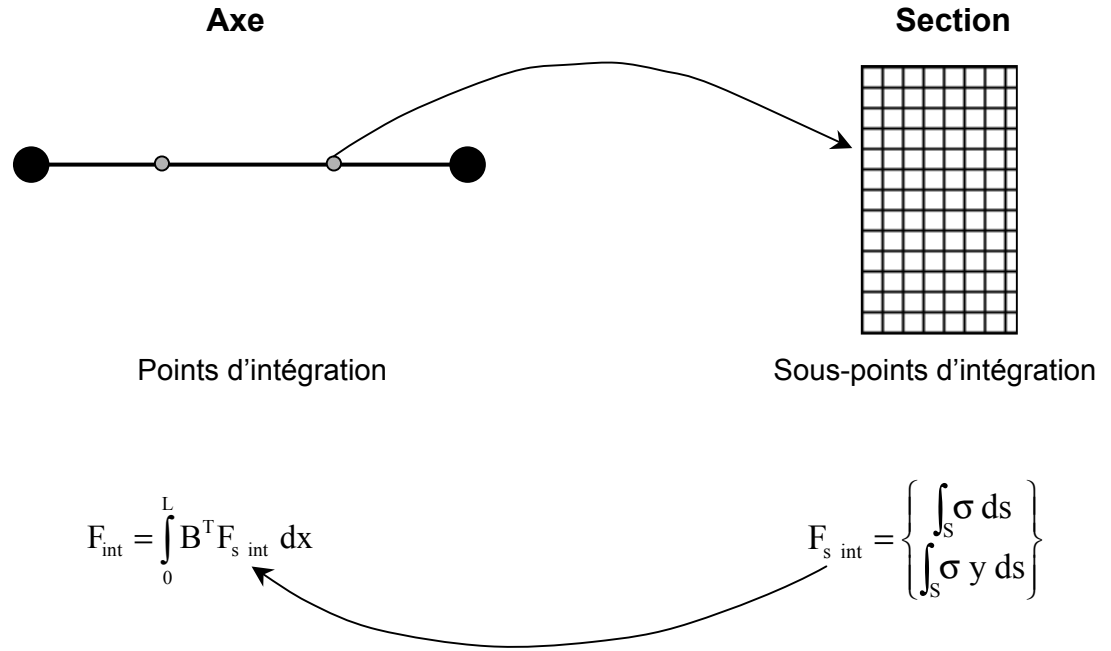


Figure 4.4-a : Poutre multifibre – Calcul de F_{int}

$$F_s^T = [N \quad M_y \quad M_z \quad M_x] \quad \text{éq. 4.4-2}$$

L'effort normal N et les moments fléchissant M_y et M_z sont calculés par intégration des contraintes sur la section [éq 4.2.1-8].

Le comportement en torsion restant linéaire, le moment de torsion est calculé avec les déplacements nodaux :

$$M_x = GJ_x \frac{\theta_{x2} - \theta_{x1}}{L} \quad \text{éq. 4.4-3}$$

L'équation [éq 4.4-1] est intégrée numériquement :

$$F_i = \int_0^L B^T F_s dx = j \sum_{i=1}^2 w_i B(x_i)^T F_s(x_i) \quad \text{éq. 4.4-4}$$

Les positions et poids des points de Gauss ainsi que le Jacobien sont donnés dans le paragraphe [§4.2.5].

Le calcul analytique de $B(x_i)^T F_s(x_i)$ donne :

$$[B(x_i)^T F_s(x_i)]^T = [-B_1 N \quad B_2 M_z \quad -B_2 M_y \quad 0 \quad B_3 M_y \quad B_3 M_z \quad B_1 N \quad -B_2 M_z \quad B_2 M_y \quad 0 \quad B_4 M_y \quad B_4 M_z] \quad \text{éq. 4.4-5}$$

où le B_i sont donnés à l'équation [éq 4.2.4-1].

4.5 Modèles de comportement non linéaires utilisables

Les modèles supportés sont d'une part les relations de comportement 1D de type `ECRO_LINE` et `PINTO_MENEGOTTO` [R5.03.09], d'autre part le modèle `Labord_1D` [R7.01.07] dédié au comportement du béton en cyclique. Par ailleurs toutes les lois 3D sont utilisables grâce à une routine « aiguillage » qui met toutes les déformations autres que la déformation axiale (le long de la fibre) à zéro.

Remarque :

Les variables internes, constantes par fibre, sont stockées dans les sous-points attachés au point d'intégration considéré.

5 Bibliographie

- [1] J.L. BATOZ, G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis - HERMES.
- [2] J. GUEDES, P. PEGON & A. PINTO : A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000 – Ispra, 1994
- [3] P. KOTRONIS : Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèle simplifiés 2D et 3D – Thèse de Doctorat de l'ENS Cachan – 2000
- [4] J.M. PROIX, P. MIALON, M.T. BOURDEIX : Éléments "exacts" de poutres (droites et courbes), Documentation de Référence du *Code_Aster* [R3.08.01]