

Manuel de Référence
Fascicule R3.03 : Conditions aux limites et chargements
Document : R3.03.03

Raccord 3D - Poutre

Résumé :

Ce document explique le principe retenu dans *Aster* pour relier une modélisation milieu continu 3D et une modélisation poutre.

Ce raccord se traduit par 6 relations linéaires reliant les déplacements de l'ensemble de nœuds "3D" (3 degrés de liberté par nœud) liés avec le nœud de poutre avec les 6 degrés de liberté de ce nœud.

Table des matières

1 Présentation du document	3
2 Le raccord 3D-poutre	3
2.1 Objectifs et solutions exclues	3
2.2 Orientation	4
2.3 Décomposition du déplacement 3D sur l'interface	5
2.4 Expression de la condition statique de raccord	8
3 Implantation de la méthode de raccord.....	9
4 Quelles utilisations peut-on faire de cette modélisation ?	10
5 Bibliographie	10

1 Présentation du document

Ce document est repris d'une note de S. ANDRIEUX [bib1] en cours de parution. Nous y avons ajouté quelques précisions concernant l'implantation de la modélisation "raccord 3D/Poutre". Commande `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01] mots clé `LIAISON_ELEM` et `OPTION` : ' 3D_POU '.

2 Le raccord 3D-poutre

2.1 Objectifs et solutions exclues

Lorsque l'on désire analyser finement une partie d'une structure élancée complexe [Figure 2.1-a], on peut, pour minimiser la taille du maillage à manipuler, vouloir représenter la structure par une poutre "loin" de la partie à analyser. Le but de la schématisation par une poutre est d'amener des conditions aux limites réalistes aux bords de la partie modélisée et maillée en milieu continu 3D. Le raccord 3D-Poutre doit donc satisfaire les exigences suivantes :

- P1** Pouvoir transmettre les efforts de poutre (torseur) au maillage 3D
- P2** Ne pas engendrer de contraintes "parasites" (voire de concentration de contraintes), car il faudrait alors placer le raccord suffisamment loin de la zone à analyser pour que ces perturbations soient atténuées dans la zone d'étude.
- P3** Ne pas favoriser les conditions cinématiques ou les conditions statiques de raccord l'une par rapport à l'autre. Il doit être équivalent de ramener un torseur d'effort ou de déplacement aux limites du domaine 3D.
- P4** Admettre des comportements quelconques de part et d'autre du raccord (élasticité, plasticité ...) et permettre également une analyse dynamique.

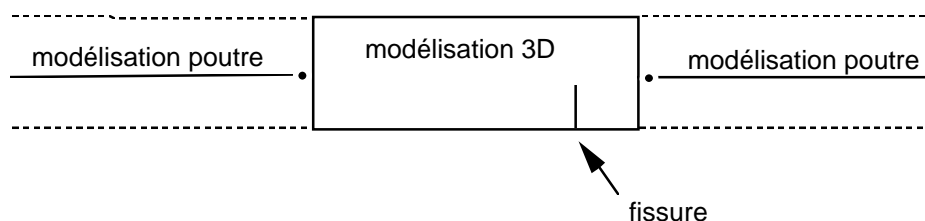
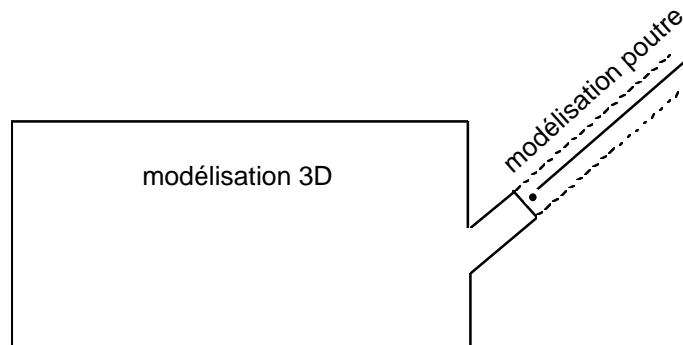


Figure 2.1-a

Si ces objectifs sont atteints on pourra également utiliser les règles de raccord pour traiter le problème de l'encastrement d'une poutre dans un massif 3D. Cependant la répartition des contraintes dans le massif autour de l'encastrement restera assez grossière et devra être utilisée avec précaution. Il est préférable de mailler le raccord en 3D puis de prolonger l'amorce du maillage 3D de la section de poutre par un des éléments de poutre avec raccord 3D/Poutre [Figure 2.1-b].

**Figure 2.1-b**

Au vu des objectifs 1 à 4, on peut d'ores et déjà éliminer deux techniques de raccord courantes :

- 1) la première qui ramène tout le raccord au traitement de conditions de liaisons entre les points en vis-à-vis à l'intersection de l'axe neutre de la poutre et du solide 3D. Hormis la difficulté de définir correctement la rotation "ponctuelle" du point matériel appartenant au solide 3D, on concentre les efforts (réaction concentrée, couple) en ce point et on brise la symétrie cinématique/statique en privilégiant une cinématique particulière.
- 2) la seconde solution qui impose totalement un déplacement de poutre (NAVIER-BERNOULLI) aux points du massif 3D se trouvant à l'intersection du solide 3D et de la section de la poutre. En élasticité, on sait que l'hypothèse d'indéformabilité des sections dans leur plan n'est qu'une approximation. Correcte du point de vue énergétique pour la poutre, elle conduit à des concentrations de contraintes au voisinage des limites de la section de jonction pour le solide 3D.

Remarque :

Il va sans dire que tout ce qui est présenté ici n'est valable que dans l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacements).

2.2 Orientation

Nous partons des éléments mécaniques du raccord :

- le champ de vecteur contraintes $\sigma.n$ défini sur la trace de la section S de la poutre sur le massif 3D, n étant la normale au plan de S ,
- et le champ de déplacement u^{3D} défini sur ce même domaine,

pour le solide tridimensionnel, ainsi que :

- le torseur T des efforts de poutre au centre d'inertie géométrique G de S ,
- et le torseur D des déplacements de poutre en ce même point,

pour la poutre.

Ces grandeurs mécaniques sont reliées par :

- les conditions de continuité cinématique,
- les conditions d'équilibre du raccord.

Les premières conditions sont les conditions de liaisons à imposer dans une approche "déplacement", les secondes se déduisent de la formulation faible de l'équilibre via le travail virtuel des actions de contact entre poutre et massif (qui n'est autre que l'expression du "principe" de l'action et la réaction écrit pour l'interface S). Sur la surface S , on a en effet pour tout déplacement virtuel (v, T, Ω) licite :

$$\int_S \sigma \cdot n \cdot v \, dS = F \cdot T + M \cdot \Omega \quad \text{éq 2.2-1}$$

où :

- T et Ω sont respectivement la translation et la rotation infinitésimale de la poutre : $D = (T, \Omega)$
- F et M sont respectivement la résultante et le moment dans la poutre au point de raccord :
 $T = (F, M)$

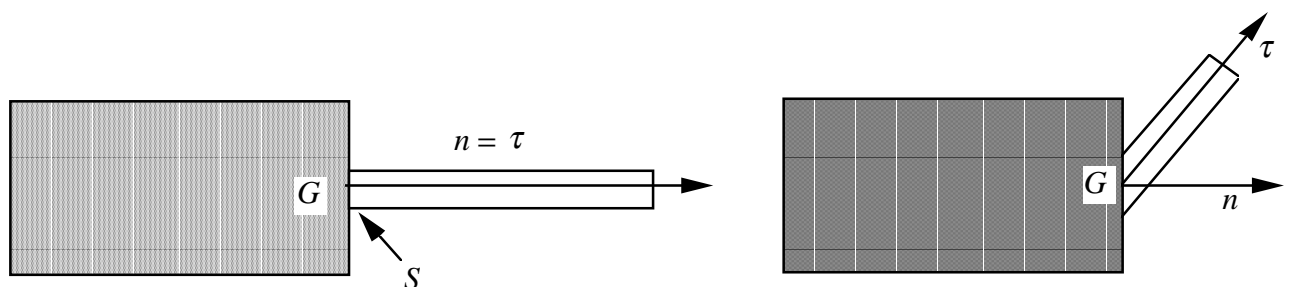
Le premier membre de cette égalité va fournir le produit scalaire grâce auquel on définira la "composante poutre" d'un champ de déplacement 3D défini sur S . En utilisant ce produit scalaire, on assurera la symétrie de l'approche entre conditions cinématiques et statiques de raccord (P3) ainsi que la possibilité de traiter des comportements quelconques de part et d'autre du raccord (P4) puisqu'aucun aspect de comportement n'apparaît dans l'égalité d'équilibre utilisée.

La démarche :

On va décomposer le champ de déplacement 3D en une partie "poutre" et une partie "complémentaire". Ceci nous amènera à définir assez naturellement les conditions de raccord cinématique entre poutre et solide 3D comme l'égalité du déplacement (torseur) de poutre et de la partie poutre du champ de déplacement 3D [(§ 2.3)]. Une fois ceci fait, l'égalité [éq 2.2-1] nous permettra d'interpréter en terme statique les conditions de raccord et d'accéder ainsi aux conditions de raccord statique [(§2.4)].

2.3 Décomposition du déplacement 3D sur l'interface

La jonction entre le solide tridimensionnel B et la poutre de section S est supposée plane et de normale n parallèle à la tangente τ à la poutre au point de contact G , centre d'inertie géométrique de la section S [Figure 2.3-a].



(a) Normale au solide = tangente à la poutre

(b) Normale au solide ° tangente à la poutre

Figure 2.3-a

On exclut donc le cas (b) où la poutre ne "sort" par perpendiculairement à la surface du solide. Il faut bien comprendre que cette restriction est nécessaire à la cohérence du raccord tel qu'il est envisagé ici puisque la théorie des poutres ne connaît que des coupures normale à la fibre moyenne : la condition d'équilibre [éq 2.2-1] n'a aucun sens si S n'est pas la section droite de la poutre. Dans le cas où cette condition est violée, on pourra modifier le maillage pour la réaliser comme l'indique le schéma ci-dessous.

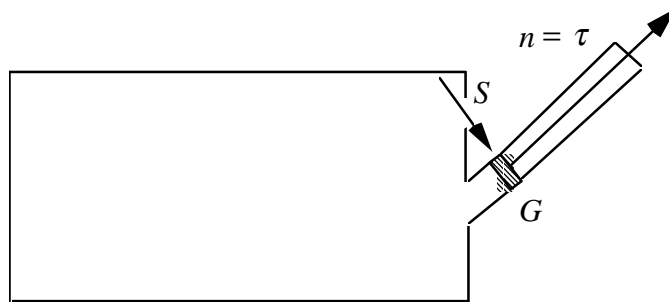
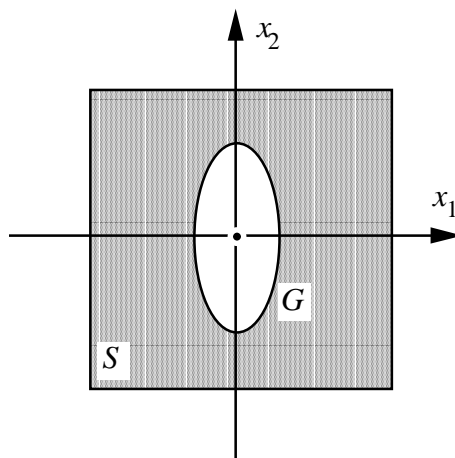


Figure 2.3-b

On note :



- $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ un repère principal d'inertie géométrique de S ayant pour origine le centre d'inertie G , et (x_1, x_2) les coordonnées associées,
 - n ou \mathbf{e}_3 la normale au plan S , sortante au massif 3D,
 - $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma)$ la forme alternée du produit mixte des vecteurs de base,
- enfin \mathbf{I} le tenseur d'inertie géométrique de S (diagonal dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$) et $A = |S|$ l'aire de la section S .

Rappelons que le tenseur d'inertie \mathbf{I} peut être défini de manière équivalente par une application linéaire (représentant mixte) :

$$\mathbf{I}(\mathbf{U}) = \int_S \mathbf{GM}(x) \wedge (\mathbf{U} \wedge \mathbf{GM}(x)) dx$$

ou une application bilinéaire symétrique (représentant covariant) :

$$\mathbf{I}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_S (\mathbf{U} \wedge \mathbf{GM}(x)) \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{GM}(x)) dx$$

Ces deux expressions seront utiles, dans le repère $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la matrice représentative de \mathbf{I} est :

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 + I_2 \end{bmatrix}$$

avec I_α moment d'inertie géométrique de S par rapport à l'axe (G, \mathbf{e}_α) . Par convention les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2.

L'espace utile pour les champs de déplacements et de vecteurs contraintes définis sur S est $V = L^2(S)^3$. On introduit l'espace \mathbf{T} des champs associés à un torseur (défini par deux vecteurs) :

$$\mathbf{T} = \left\{ \mathbf{v} \in V / \exists (\mathbf{T}, \Omega) \text{ tel que } \mathbf{v}(M) = \mathbf{T} + \Omega \wedge \mathbf{GM} \right\} \quad \text{éq 2.3-1}$$

Pour les champs de déplacement de S , \mathbf{T} est la translation de la section (ou du point G), Ω la rotation infinitésimale et les champs \mathbf{v} sont les déplacements conservant la section S plane et non déformée (Hypothèses de NAVIER-BERNOULLI).

Pour les champs de vecteurs contraintes, $|S|\mathbf{T}$ est la résultante \mathbf{F} des actions appliquées à S , et $\mathbf{I}(\Omega)$ est le moment résultant \mathbf{M} en G . Les champs \mathbf{v} correspondent alors à des répartitions de contraintes affines dans la section. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\sigma) &\equiv \int_S \sigma \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \mathbf{T} \, dS = |S|\mathbf{T} \\ \mathbf{M}(\sigma) &\equiv \int_S \mathbf{GM}(x) \wedge \sigma \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \mathbf{GM}(x) \wedge (\Omega \wedge \mathbf{GM}) \, dS = \mathbf{I}(\Omega) \end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que G est centre d'inertie géométrique donc : $\int_S x_\alpha \, dS = 0$. Le sous-espace vectoriel \mathbf{T} étant de dimension finie (égale à 6) possède un supplémentaire orthogonal pour le produit scalaire défini sur V :

$$\mathbf{T}^\perp = \left\{ \mathbf{v} \in V / \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dS = 0 \, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{T} \right\} \quad \text{éq 2.3-2}$$

Soit, de façon plus explicite :

$$\mathbf{T}^\perp = \left\{ \mathbf{v} \in V / \int_S \mathbf{v} \, dS = 0 \text{ et } \int_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{v} \, dS = 0 \right\} \quad \text{éq 2.3-3}$$

Tout champ de V se décompose de façon unique en somme d'un élément de \mathbf{T} et d'un élément de \mathbf{T}^\perp .

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s \quad \mathbf{u}^p \in \mathbf{T} \quad , \quad \mathbf{u}^s \in \mathbf{T}^\perp \quad \text{éq 2.3-4}$$

On a de plus la propriété suivante :

Pour tout couple de champ 3D (\mathbf{u}, \mathbf{v}) définis sur S ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}^p + \mathbf{v}^s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dS = \int_S \mathbf{v}^p \cdot \mathbf{w}^p dS + \int_S \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{w}^s dS \quad \text{éq 2.3-5}$$

La définition suivante est donc naturelle :

Définition :

On appelle composante de déplacement de poutre d'un champ \mathbf{u} défini sur la section la composante \mathbf{u}^p de \mathbf{u} sur le sous-espace.

Le calcul de la partie poutre d'un champ 3D \mathbf{u} s'opère en utilisant la propriété de projection orthogonale puisque T et T^\perp sont orthogonaux par définition.

Si on note $\mathbf{u}^p = T_{\mathbf{u}} + \Omega_{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{GM}$, alors :

$$(T_{\mathbf{u}}, \Omega_{\mathbf{u}}) = \underset{(\mathbf{T}, \Omega)}{\text{Argmin}} \int_S (\mathbf{u} - \mathbf{T} - \Omega \wedge \mathbf{GM})^2 \quad \text{éq 2.3-6}$$

On notera au passage l'interprétation de la composante poutre de \mathbf{u} : c'est le champ de déplacement de poutre le plus proche de \mathbf{u} au sens des moindres carrés. Le calcul du minimum conduit immédiatement à la caractérisation :

$$T_{\mathbf{u}} = \frac{1}{|S|} \int_S \mathbf{u} dS, \quad \Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{I}^{-1} \left(\int_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{u} dS \right) \quad \text{éq 2.3-7}$$

La condition de raccord cinématique cherchée est donc la liaison linéaire suivante entre le champ 3D sur S et les éléments du torseur de déplacement de la poutre en G :

$$|S| T - \int_S \mathbf{u} dS, \quad \mathbf{I}(\Omega) - \int_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{u} dS = 0 \quad \text{éq 2.3-8}$$

2.4 Expression de la condition statique de raccord

En revenant à la formulation faible de l'équilibre de l'interface [éq 2.2-1], on peut en déduire les conditions nécessaires et suffisantes de raccord statique. En effet, on a :

$$\int_S \sigma \cdot n \cdot \mathbf{v} dS = \mathbf{R} \cdot T_{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \Omega_{\mathbf{v}} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{éq 2.4-1}$$

Grâce aux expressions [éq 2.3-7] et à la décomposition de l'espace V , et à la propriété [éq 2.3-5], on a immédiatement les trois équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \\ \mathbf{M} &= \int_S \mathbf{GM}(\mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^s &= 0 \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in T^\perp \end{aligned} \quad \text{éq 2.4-2}$$

Les conditions de raccord statique sont donc :

- transmission du torseur des efforts de poutre, (satisfait la propriété P1),
- nullité de la partie complémentaire ("non poutre") du champ de vecteur contrainte 3D sur la section du solide 3D (satisfait la propriété P2).

On remarquera également la symétrie statique et cinématique (propriété P3) puisque les conditions de raccord s'interprètent également comme :

- l'égalité au sens des moindres carrés entre le déplacement 3D et le déplacement de la poutre,
- l'égalité au sens des moindres carrés entre le champ de vecteur contrainte et les éléments de réduction du torseur des efforts de poutre.

3 Implantation de la méthode de raccord

Pour chaque raccord, l'utilisateur doit définir :

- S : la trace de la section de la poutre sur le massif 3D : il le fait par les mots clés MAILLE_1 et/ou GROUP_MA_1 ; c'est-à-dire qu'il donne la liste des mailles (l_{ma}) surfaciques (affectées d'éléments "bord" de modélisation 3D) qui représentent géométriquement cette section.
- P : un nœud (mot clé NOEUD_1 ou GROUP_NO_1) portant les 6 ddl classiques de poutre : DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ

Remarque :

- le nœud P peut être un nœud d'élément de poutre ou d'élément discret,
- la liste des mailles l_{ma} doit représenter **exactement** la section de la poutre. C'est une contrainte importante pour le maillage.

Pour chaque nœud, le programme calcule les coefficients des 6 relations linéaires [éq 2.3-8] qui relient :

- les 6 ddl du nœud P,
- avec les ddl de **tous** les nœuds de l_{ma}.

Ces relations linéaires seront dualisées, comme toutes les relations linéaires issues par exemple du mot clé LIAISON_DDL de AFFE_CHAR_MECA.

Le calcul des coefficients des relations linéaires se fait en plusieurs étapes :

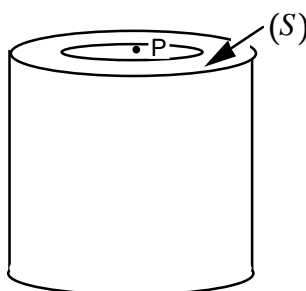
- calcul de quantités élémentaires sur les éléments de l_{ma} : (OPTION: CARA_SECT_POUT3)
 - $\text{surface} = \int_{elt} 1$; $\int_{elt} x$; $\int_{elt} y$; $\int_{elt} x^2$; ...
- sommation de ces quantités sur (S) d'où le calcul de :
 - $A = |S|$
 - position de G
 - tenseur d'inertie Ω
- connaissant G , calcul élémentaire sur les éléments de l_{ma} de : (OPTION: CARA_SECT_POUT4)

$$\int_{elt} Ni$$
 ; $\int_{elt} xNi$; $\int_{elt} yNi$; $\int_{elt} zNi$ où : $\mathbf{GM} = \{x, y, z\}$
 Ni = fonctions de forme de l'élément
- "assemblage" des termes calculés ci-dessus pour obtenir en chacun des nœuds de l_{ma} , les coefficients des termes des relations linéaires.

4 Quelles utilisations peut-on faire de cette modélisation ?

Outre les deux utilisations visées au [§2] [Figure 2.1-a] et [Figure 2.1-b], ce raccord peut aussi être utilisé pour :

- appliquer un torseur d'efforts sur une surface connue d'une modélisation 3D :
 Pour cela, l'utilisateur définit la surface d'application de l'effort (l_{ma}), il la "raccorde" avec un nœud (P) d'élément discret (DIS_TR_N) **sans rigidité** puis il applique le torseur voulu sur ce nœud (FORCE_NODALE).
 De cette façon, le torseur est appliqué en "douceur", sans engendrer de contraintes parasites sur la surface.
- "retenir" une structure sans trop l'encaster :
 Par exemple, si l'on a maillé en 3D un tuyau et que l'on veut empêcher ses mouvements de corps solide



on raccorde (S) à P puis on bloque les 6 ddls de P.

La structure est alors retenue, sans que (S) soit encastrée. En particulier, la section (S) peut s'ovaliser.

5 Bibliographie

- [1] S. ANDRIEUX : "Raccords 3D/Poutre, 3D/Coques et autres fantaisies" (note à paraître).